PITAGORAS
ACADEMIA

ÁLGEBRA

Profesor
Freddy Ávalos C

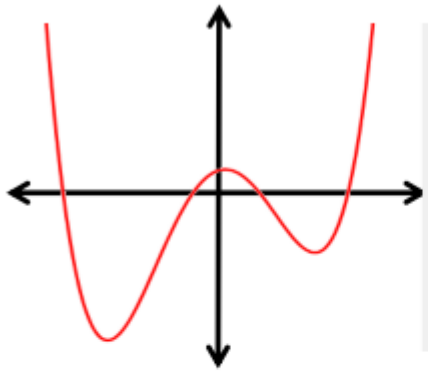
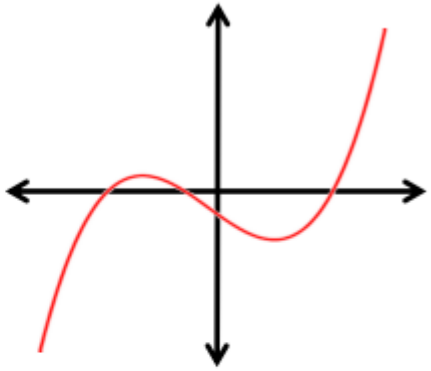
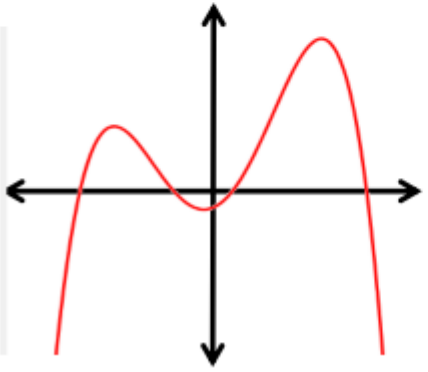
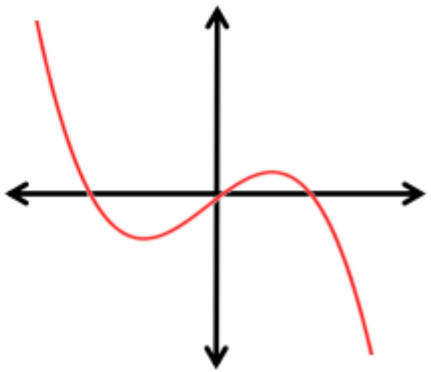
FUNCIONES

ALGEBRA DE FUNCIONES-FUNCIONES NOTABLES-FoG –FUNCION INVERSA

FUNCIONES

FUNCIÓN POLINOMIAL DE GRADO n

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

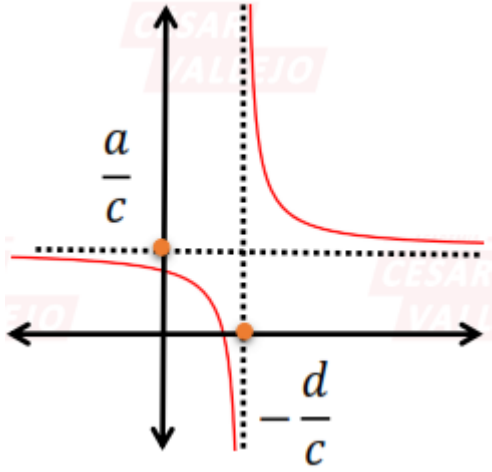
	n es par	n es impar
$a_0 > 0$		
$a_0 < 0$		

FUNCIÓN FRACCIONARIA

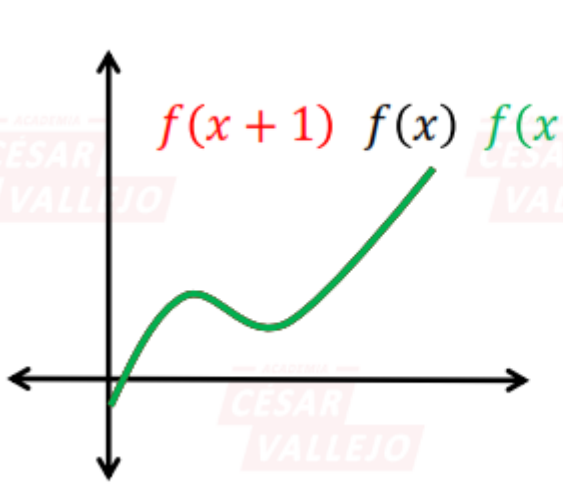
$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad c \neq 0$$

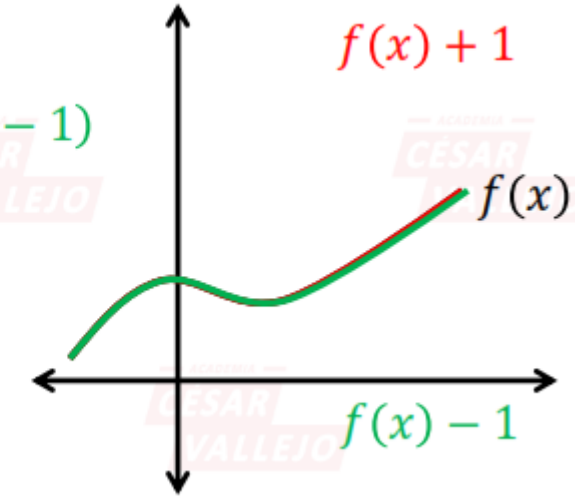
Su gráfica es una hipérbola de asíntotas.

$$y = \frac{a}{c} \qquad x = -\frac{d}{c}$$

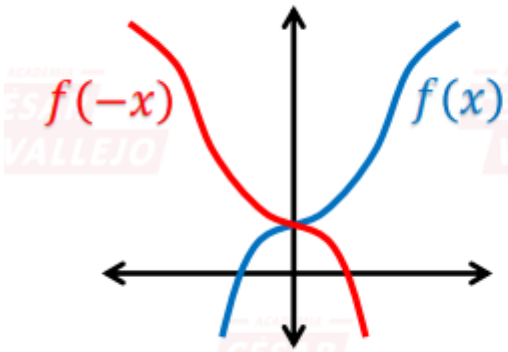


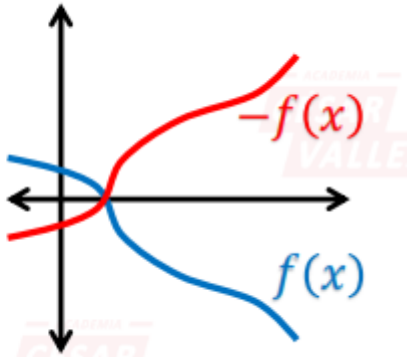
PROPIEDAD DE GRÁFICAS

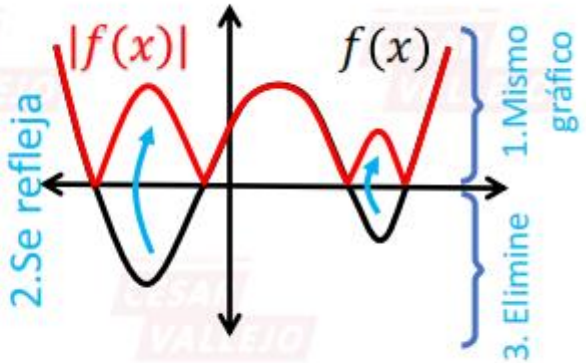




FUNCIONES







FUNCIÓN CRECIENTE

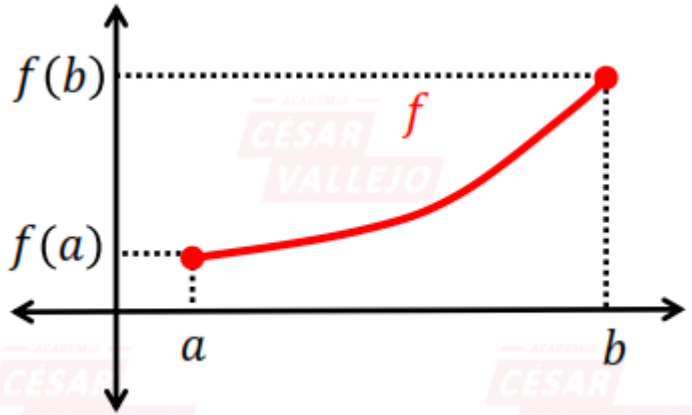
La función f es creciente en el intervalo I de su dominio si para todo par de números x_1 y x_2 de dicho intervalo se cumple

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Teorema:

Sea f una función continua y creciente.

Si Dom $f = [a; b]$ entonces Ran $f = [f(a); f(b)]$



FUNCIONES

FUNCIÓN DECRECIENTE

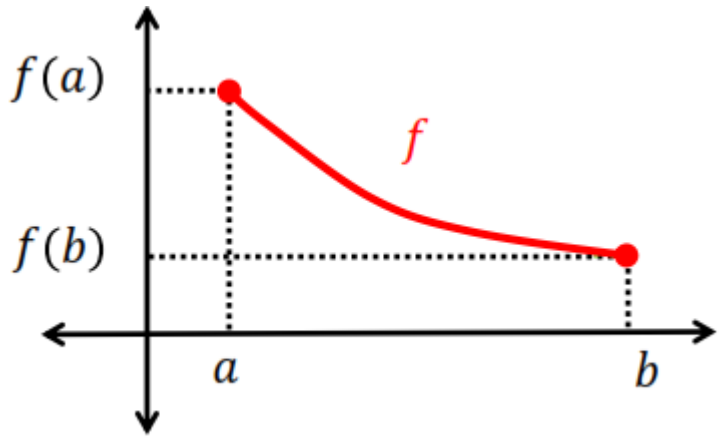
La función f es decreciente en el intervalo I de su dominio si para todo par de números x_1 y x_2 de dicho intervalo se cumple

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Teorema:

Sea f una función continua y decreciente.

Si Dom $f = [a; b]$ entonces Ran $f = [f(b); f(a)]$



ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Notación	Regla de correspondencia Dominio
$f + g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ $Dom(f + g) = Dom(f) \cap Dom(g)$
$f - g$	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ $Dom(f - g) = Dom(f) \cap Dom(g)$
$f.g$	$(f.g)(x) = f(x).g(x)$ $Dom(f \cdot g) = Dom(f) \cap Dom(g)$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ $Dom(f) \cap Dom(g) - \{x/g(x) = 0\}$
f^n	$f^n(x) = [f(x)]^n$ $Dom(f^n) = Domf$

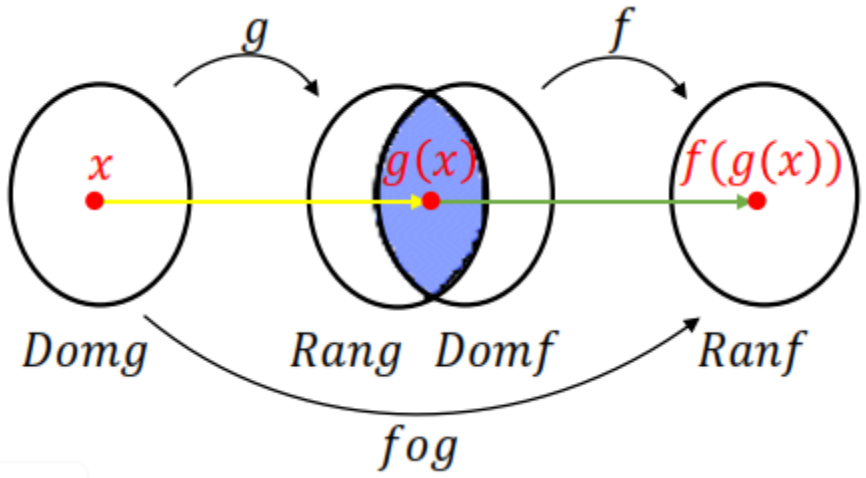
FUNCIONES

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Sean f y g son dos funciones, se denota y define su composición (f compuesta con g) por :

$$fog \begin{cases} Dom(fog) = \{x/x \in Dom\ g\ ;\ g(x) \in Domf\ \} \\ (fog)(x) \quad = f(g(x)) \end{cases}$$

En forma gráfica, tenemos:



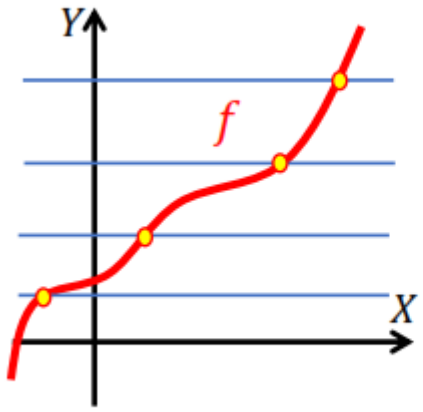
FUNCIÓN INVERSA

FUNCIÓN INYECTIVA

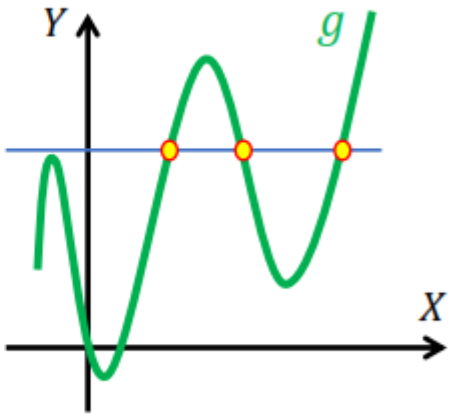
La f función es inyectiva, si todo elemento de su rango le corresponde un solo elemento del dominio, es decir:

$$Si\ f(a) = f(b) \ \rightarrow \ a = b\ ;\ a; b\ \in Domf$$

Observación:



f es inyectiva



g no es inyectiva

FUNCIONES

FUNCIÓN INVERSA

Sea $f = \{(x;y)/\ x \in Domf, y = f(x)\}$ una función inyectiva.

Se define la función inversa f^* (o también f^{-1}) como:

$$f^* = \{\ (y;x)\ /\ x \in Domf, y = f(x)\}$$

Cálculo de la función inversa (f^*)

Dado la función $y = f(x);\ x \in Domf$

1) Demostrar que f es inyectiva

2) Cálculo del $Domf^*$

Para ello, se calcula el rango de f, porque

$$Ranf = Domf^*$$

3) Cálculo del $y = f^*(x)$

Para ello:

- Se despeja x en función de y
- Se intercambia x con y

Con ello la función inversa queda definida

Propiedades:

1) $Domf^* = Ranf \quad \wedge \quad Ranf^* = Domf$

2) $f(x) = y \quad \rightarrow \quad x = f^*(y)$

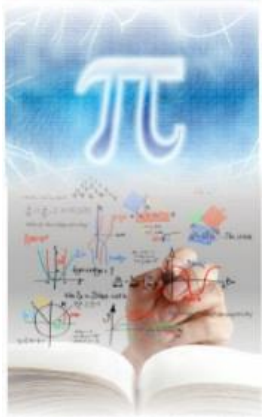
3) $(f^* of)(x) = x \quad ;\ x \in Domf$

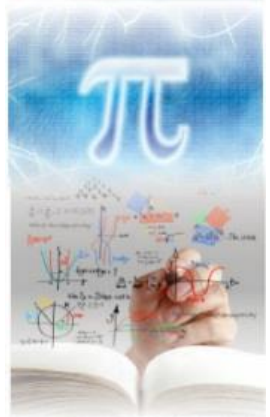
4) $(f of^*)(x) = x \quad ;\ x \in Domf^*$

5) $(f^*)^* = f$

6) La gráfica de f^* es simétrica a la gráfica de f respecto a la recta $y = x$

MOMENTO DE PRACTICAR





PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

FUNCIONES

1. Determine el valor de verdad (V) o falsedad (F) según corresponda.

I. Si $f_{(x)}=x\,\text{sgn}\,x;\ x\in\mathbb{R}$ y
$g_{(x)}=|x|;\ x\in\mathbb{R} \rightarrow f=g$ (V)

II. Si $f_{(x)}=\sqrt{x^2-x}$ y $g_{(x)}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$
$\rightarrow f=g$ (F)

III. Si $\text{Dom}f=\text{Dom}g \wedge \text{Ran}f=\text{Ran}g \rightarrow f=g$

A) VVV B) FFV C) VFV
D) VFF E) FVV

SOLUCION

I) $f(x)=x\,\text{Sgn}\,x\ ;x\in\mathbb{R} \rightarrow Df=\mathbb{R} \wedge f(x)=\begin{cases}-x; & x<0\\ 0; & x=0\\ x; & x>0\end{cases}$

$g(x)=|x|;x\in\mathbb{R} \rightarrow Dg=\mathbb{R} \wedge g(x)=\begin{cases}-x; & x<0\\ 0; & x=0\\ x; & x\geq 0\end{cases}$

$\therefore f=g$

II) $Df=\{x/x^2-x\geq 0\} \rightarrow x(x-1)\geq 0 \rightarrow x\leq 0 \vee x\geq 1$

$\rightarrow f(x)=\sqrt{x^2-x};\ x\in\langle-\infty;0]\cup[1;+\infty\rangle$

$Dg=\{x/\ x\geq 0\wedge x-1\geq 0\} \rightarrow x\geq 0\wedge x\geq 1 \rightarrow x\geq 1$

$\rightarrow g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1}=\sqrt{x(x-1)}=\sqrt{x^2-x}\ ;x\in[1;+\infty\rangle$

$\therefore f\neq g$

III) por teoría: F

$\therefore$ VFF D

2. Sean las funciones

$f = \{(-1;1), (2;3), (0;4), (4;5)\}$ y

$g_{(x)} = 2x - 1;\ x \leq 3.$

Determine la suma de elementos del rango de la siguiente función:

$$\left(5f^2 - 3\frac{f}{g}\right)$$

A) 200 B) 140 C) 130
D) 120 E) 110

SOLUCION

$f^2 = f \cdot f = \{(-1;1), (2;9); (0;16); (4;25)\}$

$\rightarrow 5f^2 = f^2 + f^2 + f^2 + f^2 + f^2 = \{(-1;5); (2;45); (0;80); (4;125)\}$

$\rightarrow 5f^2 = \{(-1;5); (2;45); (0;80); (4;125)\}$

$\frac{f}{g} = ??$ $\quad D_f \cap D_g = \{-1;2;0;4\} \cap \langle -\infty;3] = \{-1;2;0\}$

$\rightarrow \frac{f}{g} = \left\{(-1; \frac{f(-1)}{g(-1)}), (2; \frac{f(2)}{g(2)}); (0; \frac{f(0)}{g(0)})\right\} = \left\{(-1; -\frac{1}{3}); (2;1); (0;-4)\right\}$

$\rightarrow 3\frac{f}{g} = \{(-1;-1); (2;3); (0;-12)\}$

Luego:

$5f^2 - 3\frac{f}{g} = \{(-1;6); (2;42); (0;92)\}$

$Ran\left(5f^2 - 3\frac{f}{g}\right) = \{6;42;92\}$ $\quad$ $\therefore \sum elem(Ran) = 6 + 42 + 92 = 140$

3. Si se tiene que

$f_{(x)}=2x-1;\ x\geq -1$ y

$g_{(x)}=3-2x;\ x<3,$

determine el rango de $f\cdot g$.

A) $[-10; 5]$ B) $[-15; 0]$ C) $[0; 16]$
D) $[-16; 0]$ E) $[-15; 1]$

SOLUCION

$fg = ??$

$Df \cap Dg = [-1; +\infty\rangle \cap \langle -\infty; 3\rangle = [-1; 3\rangle \rightarrow D(fg) = [-1; 3\rangle$

$(f\cdot g)(x) = f(x)g(x) = (2x-1)(3-2x) = -4x^2+8x-3$

$\rightarrow (fg)(x) = -4(x^2-2x+1)+1$

$\rightarrow (f\cdot g)(x) = -4(x-1)^2+1 \ ; \ -1\leq x<3$

Cálculo del rango:

$-1\leq x<3 \rightarrow -2\leq x-1<2$

al cuadrado: $0\leq (x-1)^2\leq 4$

por -4: $0\geq -4(x-1)^2\geq -16$

$+1$: $1\geq \underbrace{-4(x-1)^2+1}_{y_{fg}}\geq -15$

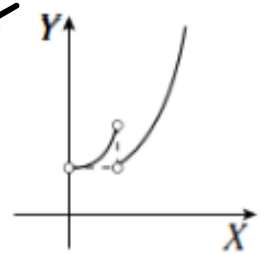
$\therefore Ran(fg) = [-15; 1]$

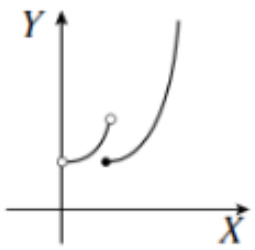
FUNCIONES

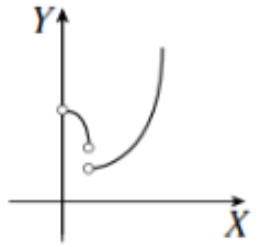
4. Grafique $f+g$ si

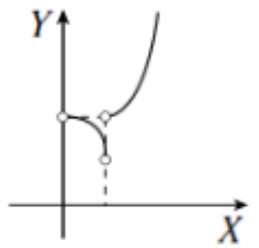
$f_{(x)}=x^2$

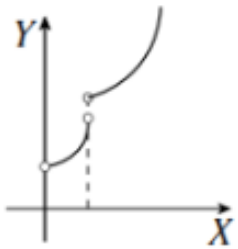
$$g_{(x)}=\begin{cases} x+1 & ; \quad 0<x<1 \\ x-1 & ; \quad x>1 \end{cases}$$

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

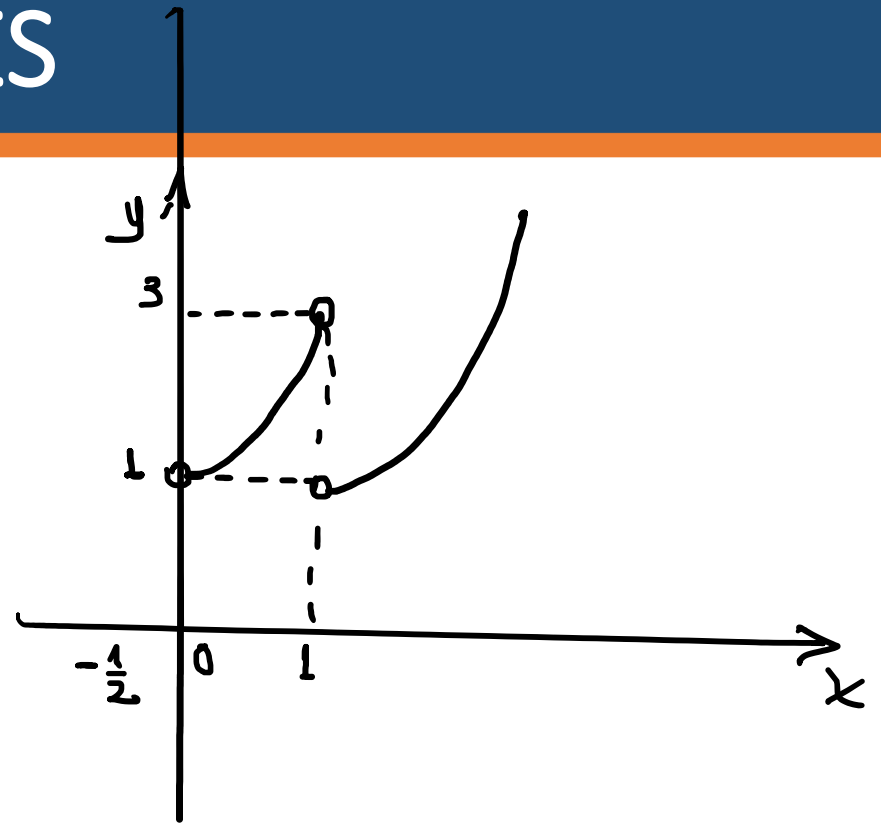
SOLUCION

$Df = \mathbb{R} \wedge Dg = \langle 0;+\infty\rangle - \{1\}$

$\rightarrow Df \cap Dg = \langle 0;+\infty\rangle - \{1\}$

$$(f+g)(x)=\begin{cases} x^2+x+1; & 0<x<1 \\ x^2+x-1; & x>1 \end{cases}$$

$$(f+g)(x)=\begin{cases} (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}; & 0<x<1 \\ (x+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}; & x>1 \end{cases}$$



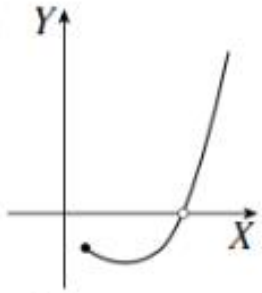
FUNCIONES

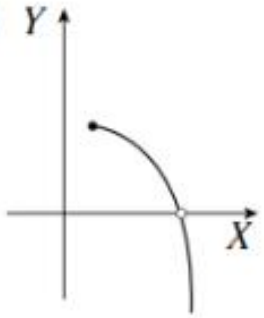
5. Sean las funciones

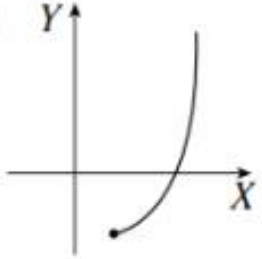
$f_{(x)}=x^3-3x+2;\ x \geq 1/2$ y

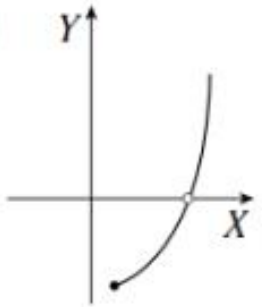
$g_{(x)}=|2x-1|-x;\ x \in \mathbb{R}$.

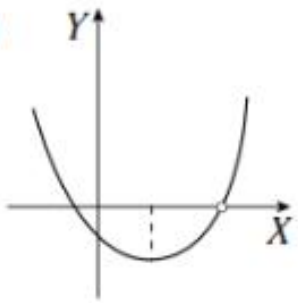
Determine la gráfica de f/g.

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

SOLUCION

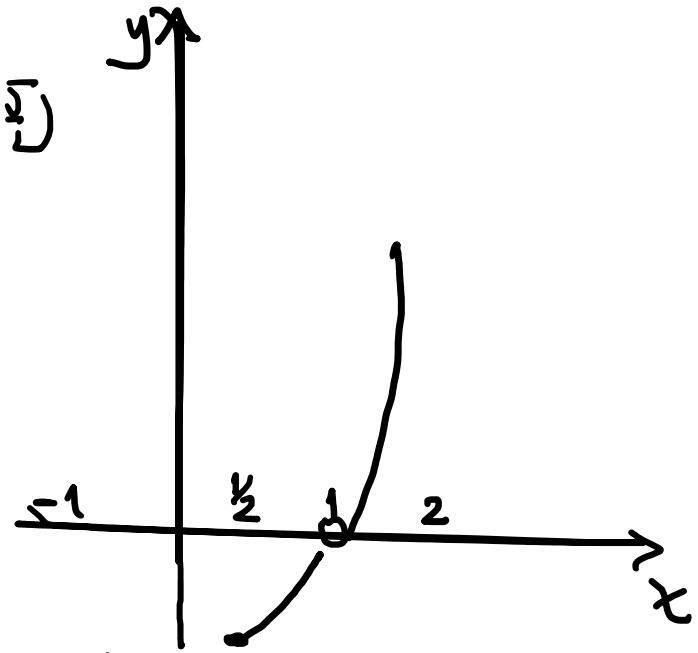
$f(x)=x^3-3x+2;\ x \geq \frac{1}{2}$

$g(x)=\begin{cases} 2x-1-x; & 2x-1 \geq 0 \\ -2x+1-x; & 2x-1<0 \end{cases}$

$g(x)=\begin{cases} x-1; & x \geq 1/2 \\ -3x+1; & x<\frac{1}{2} \end{cases}$

si no

$(-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})$



Se pide: $\frac{f}{g} \rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\begin{cases} \frac{x^3-3x+2}{x-1}, & x \geq \frac{1}{2} \wedge x \neq 1 \\ \text{No hay intersección de dominio} \end{cases}$

$\rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{(x-1)^2(x+2)}{x-1};\ x \geq \frac{1}{2} \wedge x \neq 1$

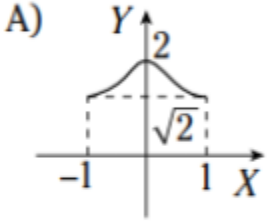
$\rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x)=(x-1)(x+2);\ x \geq \frac{1}{2} \wedge x \neq 1$

6. Esboce la gráfica $h+g$ si

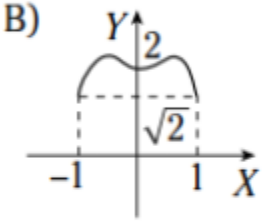
$h_{(x)} = \sqrt{x+1} + x$ y

$g_{(x)} = \sqrt{1-x} - x.$

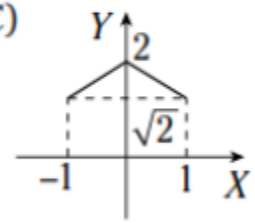
A)



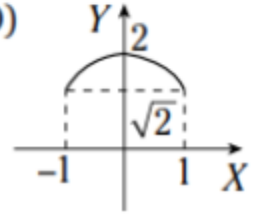
B)



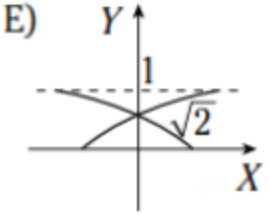
C)



D)



E)



SOLUCION

$D_h = \{x / x+1 \geq 0\} \rightarrow x \geq -1$

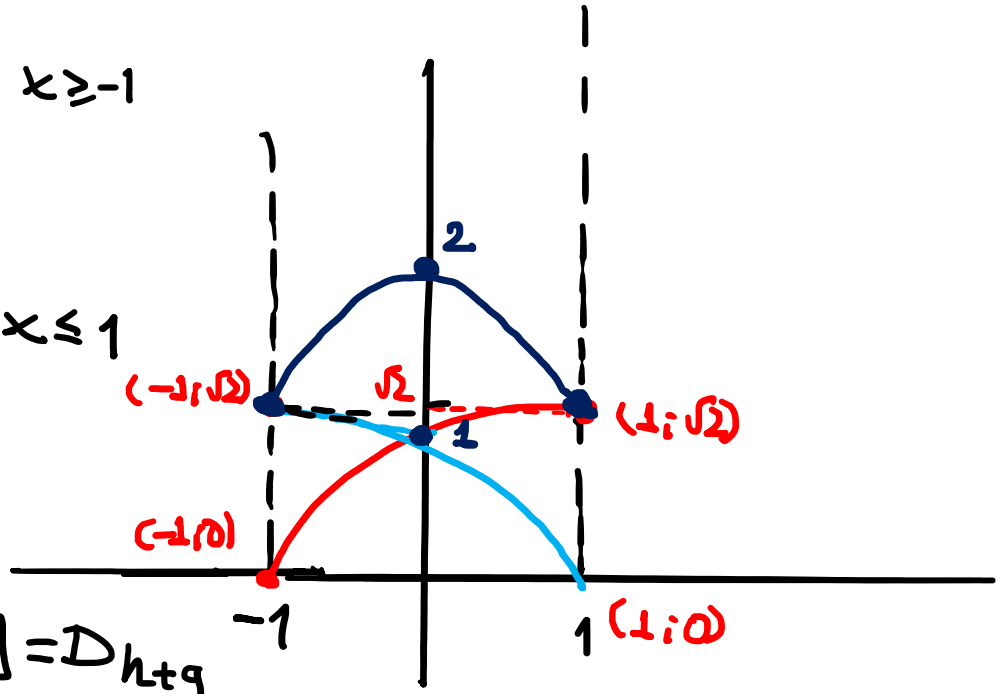
$\rightarrow \overline{D_h = [-1; +\infty\rangle}$

$D_g = \{x / 1-x \geq 0\} \rightarrow x \leq 1$

$\rightarrow \overline{D_g = \langle -\infty; 1]}$

Intersectando

$D_h \cap D_g = [-1;1] = D_{h+g}$



$(h+g)(x) = h(x) + g(x) = \sqrt{x+1} + x + \sqrt{1-x} - x$

$\rightarrow (h+g)(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}$

finalmente:

$(h+g)(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}\ ;\ -1 \leq x \leq 1$

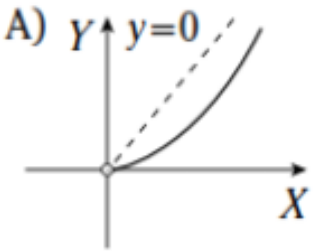
7. Dadas las funciones

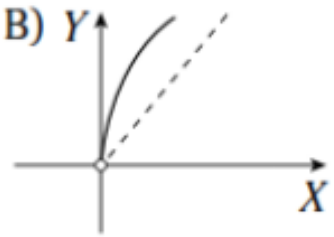
$f=\{(x;y)\in \mathbb{R}^2/y=x+e\}$ y

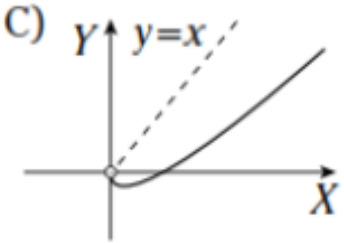
$g=\left\{(x;y)\in \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}/y=-\sqrt{x}+e\right\}$,

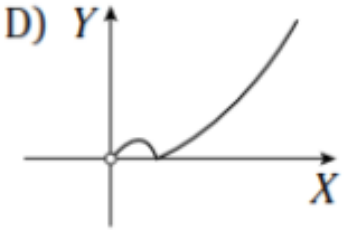
grafique $f+g$.

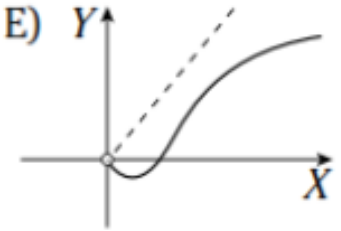
SOLUCION

A) 

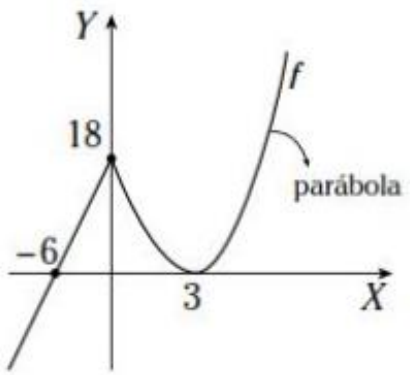
B) 

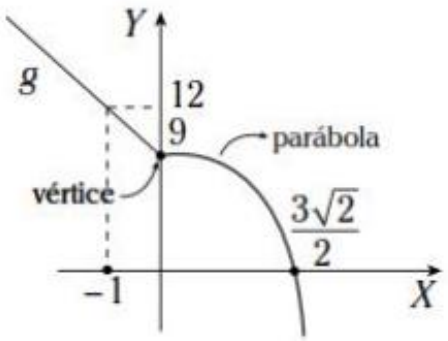
C) 

D) 

E) 

8. Las siguientes gráficas corresponden a las funciones f y g:





Determine $(f+g)$.

SOLUCION

A) $f+g=\begin{cases}27-2x; & x\geq 0\\ 27 & ; \ x<0\end{cases}$

B) $f+g=\begin{cases}18-3x; & x\geq 0\\ 27-x & ; \ x<0\end{cases}$

C) $f+g=\begin{cases}27-x; & x\leq 0\\ 18 & ; \ x>0\end{cases}$

D) $f+g=\begin{cases}27-2x; & x\geq 0\\ 18 & ; \ x<0\end{cases}$

E) $f+g=\begin{cases}27-12x; & x\geq 0\\ 27 & ; \ x<0\end{cases}$

9. Sean las funciones $f_{(x)}=x^2-x;\ x^2\geq 1$ y $g_{(x)}=\sqrt{2-x}$. Determine Dom$(g\circ f)$.

A) $\langle -\infty; -1]\cup[1; +\infty\rangle$

B) $[1; 2]\cup\{-1\}$

C) $[1; 2]$

D) $[-1; 2]$

E) $\langle -\infty; -1]\cup[1; 2]$

SOLUCION

D_f: $x^2\geq 1 \rightarrow |x|\geq 1 \rightarrow x\leq -1 \vee x\geq 1$

$\rightarrow f(x)=x^2-x;\ x\leq -1 \vee x\geq 1$

D_g: $2-x\geq 0 \rightarrow x\leq 2$

$\rightarrow g(x)=\sqrt{2-x};\ x\leq 2$

Se pide:

$D(g\circ f)=D_f\cap\{x/f(x)\in D_g\}$

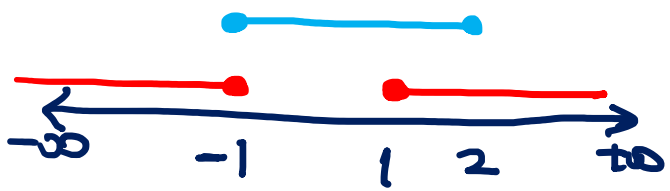
$\langle -\infty;-1]\cup[1;+\infty\rangle \cap$ $x^2-x\leq 2$

$x^2-x-2\leq 0$

$(x-2)(x+1)\leq 0$

$-1\leq x\leq 2$

Intersectando



$\therefore D(g\circ f)=[1;2]\cup\{-1\}$

10. Sean las funciones

$f_{(x)} = \dfrac{x^2+2}{x}$ y

$g_{(x)} = \sqrt{3-x}$.

Determine el dom$(g \circ f)$.

A) $\langle -\infty; 0] \cup [1; +\infty\rangle$
B) $\langle -\infty; 0\rangle \cup [1; 2]$
C) $\langle -\infty; 0\rangle \cup [1; 3]$
D) $[1; 2]$
E) $\langle -\infty; -1\rangle \cup [1; 2]$

SOLUCION

$Df = \mathbb{R} - \{0\}$

$Dg = \{x / \ 3-x \geq 0\}$

$x \leq 3$

$\rightarrow Dg = \langle -\infty, 3]$

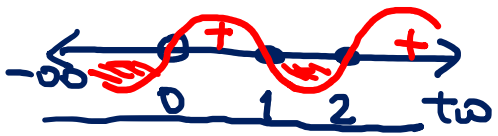
Se pide

$D(g \circ f) = Df \cap \{x / f(x) \in Dg\}$

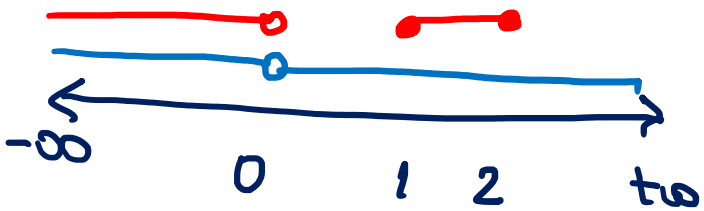
$\mathbb{R} - \{0\}$ $\qquad \dfrac{x^2+2}{x} \leq 3$

$\rightarrow \dfrac{x^2+2}{x} - 3 \leq 0$ $\qquad \dfrac{(x-2)(x-1)}{x} \leq 0$

$\dfrac{x^2-3x+2}{x} \leq 0$



$\mathbb{R} - \{0\} \cap \langle -\infty; 0\rangle \cup [1; 2]$



$\therefore D_{g \circ f} = \langle -\infty; 0\rangle \cup [1; 2]$

FUNCIONES

11. Sean las funciones

- $f_{(x)}=x+1; x \in \langle -10; 4]$
- $g_{(x)}=2x-1; x \in [-2; 12\rangle$
- $h_{(x)}=1-3x; x \in \langle 0; 6]$

Calcule $\text{Ran}((f+g)oh)$.

A) $\langle 0; 4]$ B) $\langle 0; 1]$ C) $[-2; 12\rangle$
D) $\langle -10; 12\rangle$ ~~E)~~ $[-6; 3\rangle$

SOLUCION

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x+1+2x-1 \; ; \; x \in [-2;4]$

$\rightarrow (f+g)(x) = 3x \; ; \; -2 \leq x \leq 4$

$h(x) = 1-3x \; ; \; 0 < x \leq 6$

$\text{Dom}((f+g)oh) = \text{Dom}(h) \cap \{x / h(x) \in \text{Dom}(f+g)\}$

$\langle 0; 6]$

$-2 \leq 1-3x \leq 4$

$-3 \leq -3x \leq 3$

$-1 \leq x \leq 1$

$\rightarrow \text{Dom}(f+g)oh = \langle 0; 1]$

$(f+g)oh(x) = (f+g)(h(x)) = (f+g)(1-3x) = 1-3x+1+2(1-3x) \rightarrow$

$0 < x \leq 1$

$0 > -9x \geq -9$

$3 > -9x+3 \geq -6$

$\rightarrow (f+g)oh(x) = -9x+3$

$\therefore$ Rango: $[-6; 3\rangle$

FUNCIONES

12. Un globo esférico está siendo inflado. El radio del globo crece a velocidad de 3 cm/s.

a. Encuentre una función f que modele el radio como una función del tiempo.

b. Encuentre una función g que modele el volumen como una función del radio.

c. Halle $g \circ f$. ¿Qué representa esta función?

A) $f_{(t)}=3t$; $g_{(r)}=\frac{4}{3}\pi r^3$; $(g \circ f)_{(t)}=36\pi t^3$ representa el volumen en t s.

B) $f_{(t)}=3t^2$; $g_{(r)}=2\pi r^2$; $(g \circ f)_{(t)}=36\pi t^2$ representa el área en t s.

C) $f_{(t)}=3t$; $g_{(r)}=4\pi r^3$; $(g \circ f)_{(t)}=36\pi t^3$ representa el volumen en t s.

D) $f_{(t)}=3t^2$; $g_{(r)}=\frac{4}{3}\pi r^3$; $(g \circ f)_{(t)}=9\pi t^3$ representa el volumen en t s.

E) $f_{(t)}=3t$; $g_{(r)}=\frac{4}{3}\pi r^3$; $(g \circ f)_{(t)}=36t^3$ representa el área en t s.

SOLUCION

13. Indique verdadero (V) o falso (F) respecto a las siguientes proposiciones:

I. Si f y g son funciones crecientes, entonces $f_{(x)}+g_{(x)}$ es creciente $\forall\, x \in \text{Dom}f \cap \text{Dom}g \neq \phi$.

II. Si f y g son decrecientes, entonces $f_{(g_{(x)})}$ es creciente $\forall\, x \in \text{Dom}f \circ g \neq \phi$.

III. Si f es creciente y g es decreciente, entonces $(f^3 - g^5)_{(x)}$ es creciente $\forall\, x \in \text{Dom}f \cap \text{Dom}g \neq \phi$.

A) FFF B) VFV C) VVF
D) VFF E) VVV

SOLUCION

I) V (teorema)

II) $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ---- ②
$x_1 < x_2 \rightarrow g(x_1) > g(x_2)$
$\rightarrow g(x_1) > g(x_2) \rightarrow f(g(x_1) < f(g(x_2))$
$\rightarrow f(g(x))$ es creciente (V)

III) $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2) \rightarrow f^3(x_1) < f^3(x_2)$
$x_1 < x_2 \rightarrow g(x_1) > g(x_2) \rightarrow g^5(x_1) > g^5(x_2)$

$f^3(x_1) < f^3(x_2)$
$-g^5(x_1) < -g^5(x_2)$ } +

$f^3(x_1) - g^5(x_1) < f^3(x_2) - g^5(x_2) \rightarrow$ es creciente V

14. Indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) respecto a las siguientes afirmaciones:

I. Si f es par y g impar, entonces $f \circ g$ es impar. Considere Dom $f \circ g \neq \phi$.

II. Si f es impar, entonces $f \circ f \circ f \circ f$ es impar. Considere Dom$(f \circ f \circ f \circ f) \neq \phi$.

III. Si f es una función par y g una función par, entonces $f \circ g$ es par. Considere Dom$f \circ g \neq \phi$.

A) FVV B) VFF C) FFV

D) FFF E) VFV

SOLUCION

FUNCIONES

15. Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda. Considere que todas las funciones existan.

I. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

II. $(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$

III. $(f \times g) \circ h = (f \circ h) \times (g \circ h)$

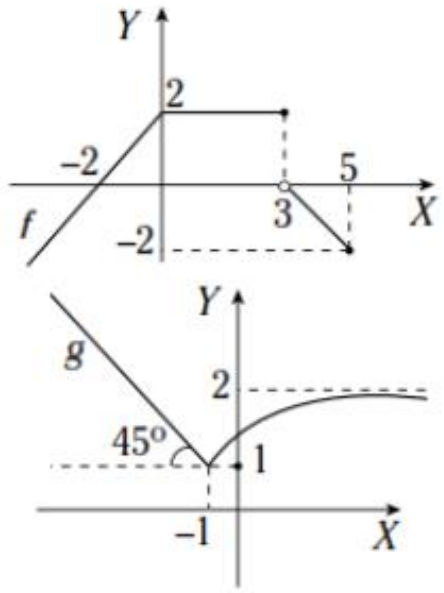
IV. $(f \circ g) \times h = (f \times h) \circ (g \times h)$

A) VVVV B) FFFF C) VVVF

D) VFVF E) VVFF

SOLUCION

16. Se tienen las gráficas de las funciones f y g, tal como se muestra a continuación:



Determine las proposiciones que son correctas.

I. Dom$f$ o g=[–5; +∞⟩

II. Dom$g$ o f=⟨–∞; 5]

III. Ran$f$ o g=[–2; 0⟩ ∈ {2}

IV. Ran$g$ o f=[1; +∞⟩

A) I y III

B) I y II

C) solo II

D) II, III y IV

E) I, II, III y IV

SOLUCION

17. Calcule f^* si se tiene que

$f_{(x)} = x^2 - 3x + 1 \wedge \text{Dom}\, f = \langle -\infty;\ 1]$

SOLUCION

A) $f^*_{(x)} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{4x+5}}{2};\ \text{Dom}\, f^* = [-1;\ +\infty\rangle$

B) $f^*_{(x)} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{4x+5}}{2};\ \text{Dom}\, f^* = \langle -\infty;\ -1]$

C) $f^*_{(x)} = \frac{3}{2} - \sqrt{4x+5};\ \text{Dom}\, f^* = [-1;\ 1]$

D) $f^*_{(x)} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2x+5}}{2};\ \text{Dom}\, f^* = \langle -\infty;\ -1]$

E) $f^*_{(x)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2x+5}}{2};\ \text{Dom}\, f^* = [-1;\ 1]$

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS